ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A_1 α) ορισμός σχολ. σελ. 15

β) i) σχολ. σελ. 35

ii) σχολ. σελ. 36

A_2 Θ. Fermat σχολ. σελ. 142

A_3 Απόδειξη σχολ. σελ. 135

A_4 α) Λάθος σχολ. σελ. 134

$$f(x)=\begin{cases} -1 & , x<0 \\ 1 & , x>0 \end{cases}$$

β) Λάθος σχολ. σελ. 70

Πρέπει f συνεχής

A_5 δ) 4

Θέμα Β

$f(x)=e^{-x}+\lambda$,

Έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=2$

(Β1) πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Rightarrow \lambda=2$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$ (με $u=-x$)

άρα $f(x)=e^{-x}+2$

(Β2) Έστω $g(x)=f(x)-x$ συνεχής στο $[2,3]$

$g(2)=f(2)-2=e^{-2}-2+2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}>0$

$g(3)=f(3)-3=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0$

άρα $g(2)\cdot g(3)<0$

οπότε ισχύει το ΘΒ για την $g(x)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$

και επειδή $g'(x)=-(e^{-x}+1)<0 \Rightarrow g\downarrow$ μοναδική

(Β3) Έστω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{-x_1}+2=e^{-x_2}+2\Rightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow$

$x_1=x_2$. Άρα η συνάρτηση είναι "1-1"

Έστω $f(x)=y\Rightarrow e^{-x}+2=y\Rightarrow e^{-x}=y-2\Rightarrow -x=\ln(y-2)$

πρέπει $y-2>0$

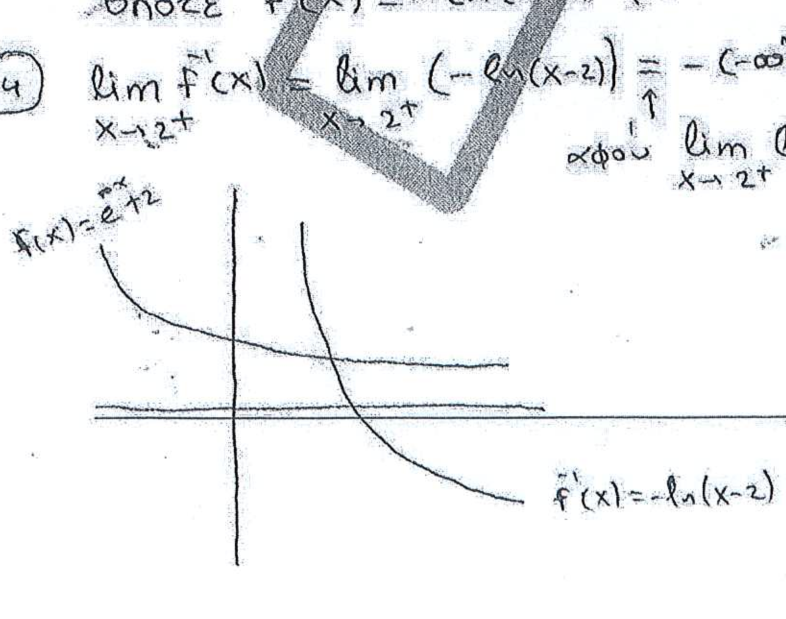
$y>2$

$\Rightarrow x=-\ln(y-2)$

Οπότε $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $x>2$

(Β4) $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(-\ln(x-2))=-(-\infty)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$ (με $u=x-2$)



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ e^{x-1} + bx & x < 1 \end{cases}$$

Γ.1 Αφού f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.

Άρα η f θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$

Άρα $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + a) = 1 + a = f(1) \\ &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (e^{x-1} + bx) = 1 + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 + a = 1 + b \Leftrightarrow a = b \quad (1)$$

Επίσης η f θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$

Άρα $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} + bx - 1 - a}{x - 1} \overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} + bx - 1 - b}{x - 1} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 1^-} \frac{(e^{x-1} + bx - 1 - b)'}{(x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (e^{x-1} + b) = 1 + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} =$$

$= \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$ Άρα $1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 1$

Γ.2 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x & x<1 \\ x^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$

Αν $x<1$ $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x<1$

Αν $x>1$ $f'(x)=2x>0$ για κάθε $x>1$

Η f συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$ άρα $f\uparrow$ στο $A_f=\mathbb{R}$

Αφού f συνεχής και $\uparrow$ στο $A_f=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

Άρα $f(A)=\mathbb{R}$

Γ.3 $f\uparrow$ στο $(-\infty,0]$ και συνεχής.

Άρα $f((-\infty,0])=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$

$0\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ Άρα υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε

$f(x_0)=0$ και είναι μοναδικό αφού $f\uparrow$ στο A_f

Άρα f "1-1"

ii) Όπως αποδείξαμε $f(x_0)=0$ με $x_0<0$

(E) $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot[f(x)-x_0]=0$

θα δείξουμε ότι η (E) είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Αφού $f(x_0)=0$ και $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x>x_0$

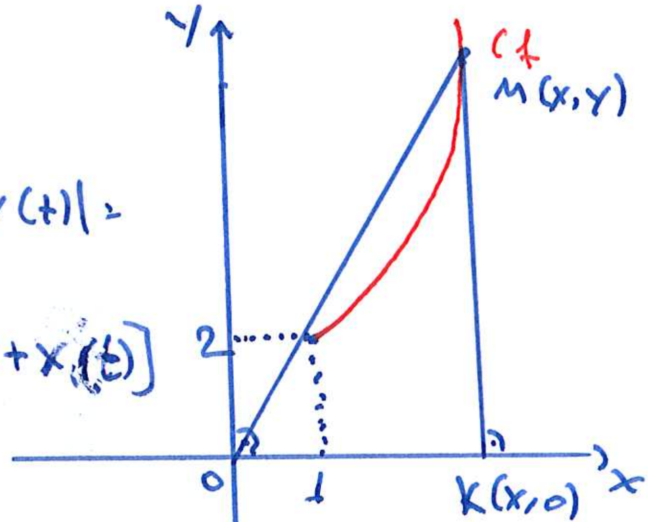
$\Rightarrow f(x)>f(x_0)=0$.

$f(x)>0>x_0$ άρα $f(x)-x_0>0$

άρα $f(x)[f(x)-x_0]>0$ για κάθε $x>x_0$

Άρα η (E) $f(x)\cdot[f(x)-x_0]=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ.4) Αν $x\geq 1 \Rightarrow f(x)=x^2+1$



$(OKM)=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}|x(t)|\,|y(t)|=$

$=\frac{1}{2}x(t)\cdot[x^2(t)+1]=\frac{1}{2}[x^3(t)+x(t)]$

αφού $x(t)\geq 1>0$ και $y(t)>0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $E(t)=\frac{1}{2}[x^3(t)+x(t)]$

με $x(t)\geq 1$

$E'(t)=\frac{1}{2}[3x^2(t)\,x'(t)+x'(t)]$

Για $t=t_0$ όπου $x'(t_0)=2$ ... και $x(t_0)=3$ έχουμε

$E'(t_0)=\frac{1}{2}[3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)]=$

$=\frac{1}{2}[3\cdot 3^2\cdot 2+2]=3\cdot 3^2+1=28$ τ.μ./sec

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10/6/2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. $f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

$$\alpha+\beta=1 \Rightarrow \boxed{\beta=1-\alpha=2}$$

Δ2. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2 \quad , x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1 \quad , x\in\mathbb{R}$$

$$E=\int_1^2 |f(x)-(-x+2)|\,dx$$

$$=\int_1^2 (f(x)+x-2)\,dx \quad , \text{ γιατί}$$

$$f(x)+x-2 = (x-1)\cdot \ln(x^2-2x+2)$$

$$= (x-1)\cdot \ln\left[(x-1)^2+1\right] > 0 \,,$$

για κάθε $x > 1$.

Άρα $E = \int_1^2 \left[(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right] dx$

Θέτουμε $u = x^2-2x+2$,

$du = 2x-2 = 2(x-1)$ και

$u_1 = 1^2-2\cdot1+2 = 1$, $u_2 = 2^2-2^2+2 = 2$

Οπότε:

$$E = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u \, du.$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (u)' \ln u \, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[[u\cdot \ln u]_1^2 - \int_1^2 u\cdot(\ln u)' du \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \int_1^2 1\, du\right) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 1)$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \text{ τ.μ.}$$

Δ3. (i) $f'(x) \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} \geq 0$$ που

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γιατί:

- $\ln(x^2-2x+2) = \ln[(x-1)^2+1] \geq 0$

και $\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} = \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2) + \frac{3}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2}$, –//–

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2}) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$, –//–

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2}) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < \lambda + \frac{1}{2}$.

Η $f(x)$ είναι,

- συνεχής στο διάστημα $[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}]$
- παραγωγίσιμη στο $(\lambda, \lambda+\frac{1}{2})$

από το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $\xi \in (\lambda, \lambda+\frac{1}{2})$

τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\lambda+\frac{1}{2}) - f(\lambda)}{(\lambda+\frac{1}{2}) - \lambda} = \frac{f(\lambda+\frac{1}{2}) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}.$$

Από το Δ3.(i) έχουμε ότι:

$f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα

θα είναι και $f'(\xi) \geq -1$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(\lambda+\frac{1}{2}) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1.$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2}) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Δ4. Έστω $K(\alpha, f(\alpha))$ τυχαίο σημείο της C_f και $\Lambda(\beta, g(\beta))$ ένα τυχαίο σημείο της C_g.

$g'(x) = -3x^2 - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Πρέπει $f'(\alpha) = g'(\beta)$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} - 1 = -3\beta^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} = -3\beta^2 \quad (1)$$

Επειδή $\ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \dfrac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} \geq 0$

και $-3\beta^2 \leq 0$, η (1) ισχύει μόνον όταν $\boxed{\alpha = 1 \text{ και } \beta = 0}$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι η $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 2}$$